

## Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

---

NOM :

### Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barème : Réponse juste : 0.5 pt ; Justification : 1 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

#### 1. Une onde de Mach :

- a. est une onde de choc oblique infiniment faible. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

- b. peut être curviligne. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

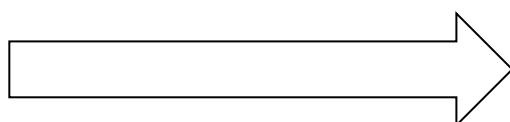
- c. a une pente qui diminue avec une augmentation du nombre de Mach. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

#### 2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. la pression ne dépend que de la température. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

- b. un gaz est obligatoirement parfait. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

- c. il n'est pas possible de passer de supersonique en subsonique. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :



**3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :**

- a. la vitesse et le nombre de Mach varient dans le même sens. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. il peut être subsonique en sortie même s'il est supersonique dans une partie de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. il y a toujours des ondes de Mach dans certaines parties de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. seul un endroit peut devenir sonique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. pression et température varient toujours dans le même sens, que l'écoulement soit isentrope ou non. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

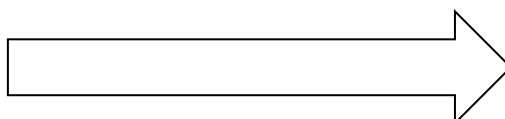
- f. le débit volumique ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) est constant le long de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

**4. Une onde de choc droite dans un gaz parfait :**

- a. se déplace toujours à une vitesse supérieure à la vitesse du son du gaz au repos qu'elle traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



- b. ne voit jamais les mêmes vitesses d'écoulement en amont et en aval, quel que soit le référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. modifie la pression statique mais pas la pression totale. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. modifie toujours la vitesse du son de l'écoulement qui la traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. est le seul moyen de comprimer un écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

##### 5. Une onde de choc oblique :

- a. est toujours moins intense qu'une onde de choc droite pour un même nombre de Mach en amont. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est toujours ancrée à un corps solide. VRAI FAUX

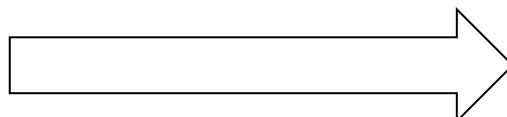
Justification/Commentaire :

- c. ne change ni la vitesse tangentielle ni le nombre de Mach tangential. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. peut être un choc droit par un changement approprié de référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



**6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:**

- a. peut augmenter le nombre de Mach jusqu'à une valeur infinie. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. n'est rien d'autre qu'un écoulement 2D avec une famille de caractéristiques de Riemann rectilignes. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. peut soit comprimer soit détendre l'écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

## Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

---

NOM :

### Partie 2 : Exercices

Barème : Ex 1: 18 pts ; Ex 2 : 28 pts, Ex 3 : 18 pts

Total max : 64 pts.

**Documents (formulaire, tables) distribués, jusqu'à 18h15 max**

#### 1. Fermi & Hunga

- Fermi

Lors du premier essai de la **bombe atomique (Trinity, 16 Juillet 1945)**, Enrico Fermi (physicien nucléaire et Prix Nobel) a estimé l'intensité de l'explosion en faisant tomber des bouts de papiers et en observant leur déplacement horizontal lors du passage de l'onde de choc. Dans une lettre (secrète, mais maintenant déclassifiée), il écrit :

« Le matin du 16 Juillet, je me trouvais au Base Camp de Trinity, à environ 10 miles [16 km] du site de l'explosion. [...] Environ 40 secondes après l'explosion, le souffle de l'explosion est arrivé. J'ai essayé d'estimer l'intensité de l'explosion en lâchant d'une hauteur d'environ 6 pieds [1,83 m] des petits bouts de papiers avant, pendant et après le passage de l'onde de choc. Comme c'était une journée sans vent, j'ai pu observer très nettement et en fait mesurer le déplacement [horizontal] des bouts de papier qui étaient en train de tomber lors du passage de l'onde de choc. Le déplacement [latéral] était d'environ 2.5 m, ce qui m'a permis d'estimer l'intensité de l'explosion à 10'000 tonnes de TNT »

a. Expliquer qualitativement le phénomène, en faisant un schéma (et en indiquant en particulier la direction du « souffle » de l'explosion).

b. On suppose que les fragments de papier sont entraînés par le souffle et que leur vitesse horizontale est la vitesse du souffle. Une petite expérience dans mon labo a montré qu'il faut environ 0.8 seconde pour un bout de papier pour atteindre le sol à partir d'une hauteur de 6 pieds (le bout de papier tombe avec une vitesse terminale constante à cause du frottement de l'air). Trouver la vitesse horizontale du bout de papier de Fermi (et donc la vitesse du souffle).

c. Montrer que le module de la vitesse du souffle dans un référentiel fixe par rapport au sol est égal à la valeur absolue de  $[w_n]$ , où  $w_n$  représente la vitesse de l'écoulement de part et d'autre du choc dans un référentiel fixe par rapport au choc, et les crochets ont leur définition usuelle :  $[x] = x_2 - x_1$  (où les indices 1 et 2 représentent l'amont et aval du choc respectivement).

d. En classe, la formule suivante a été énoncée sans démonstration (F.81 sur le formulaire) :

$$[w_n]^2 = -[p][v]$$

où  $p$  est la pression et  $v$  le volume spécifique. Comme Fermi se trouvait à 16 km de l'explosion, l'onde de choc était fortement atténuée à son passage (effet  $1/r$ ). Pour un choc faible (pratiquement isentropique), il est possible d'utiliser un développement de Taylor :

$$[v] = \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s [p] + \dots$$

Montrer ainsi que, pour un choc faible :

$$[w_n] = - \frac{[p]}{\rho_1 a_1}$$

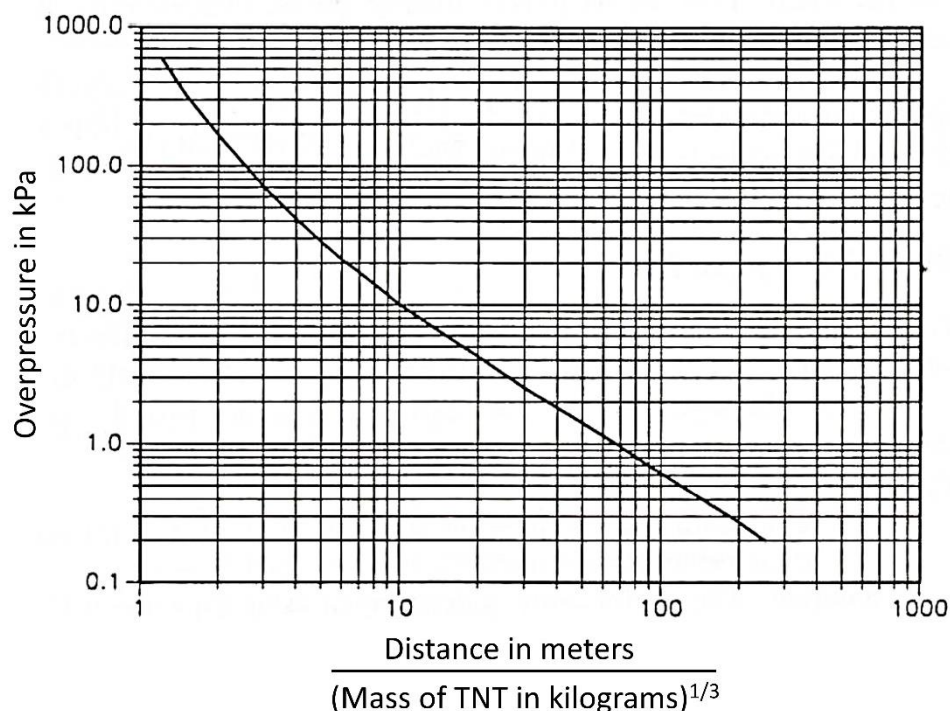
où  $\rho$  est la masse volumique,  $a$  la vitesse du son, et l'indice 1 représente les conditions ambiantes (c'est à dire en amont du choc).

e. Retrouver d'une manière simple cette dernière formule en utilisant la relation F.32 du formulaire ainsi qu'un volume de contrôle autour d'une onde de choc faible (qui se propage donc à la vitesse du son  $a$ ) et en se plaçant dans un repère fixe par rapport à l'onde.

f. Evaluer la surpression de l'onde de choc (faible) à son passage près de Fermi, en supposant une température de 25°C, une pression atmosphérique de 85'000 Pa (le site est à une altitude de 1'500 m), avec  $r = 287 \text{ J/kg.K}$  et  $\gamma = 1.4$ .

g. Le graphe suivant (Figure 1) permet d'estimer les kilogrammes de TNT d'une explosion à partir de la surpression au passage d'une onde sphérique à une distance donnée de l'épicentre. Vérifier que Fermi avait donné une bonne estimation de l'intensité de l'explosion de Trinity (le résultat doit être divisé par un facteur de 2 pour une onde hémisphérique).

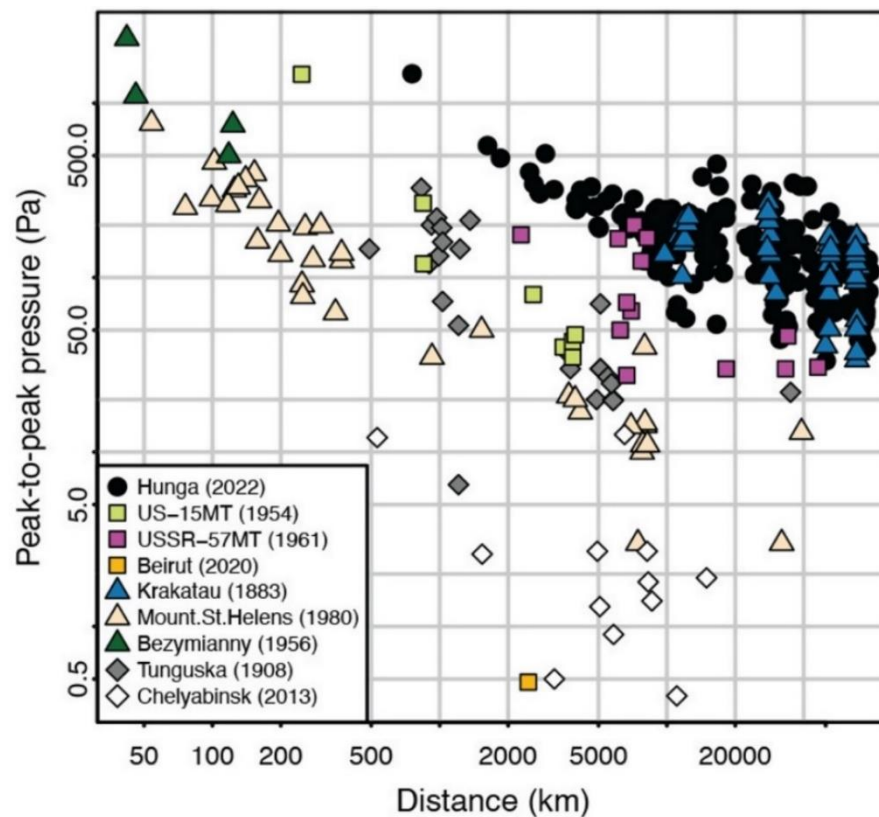
Figure 1



- **Hunga**

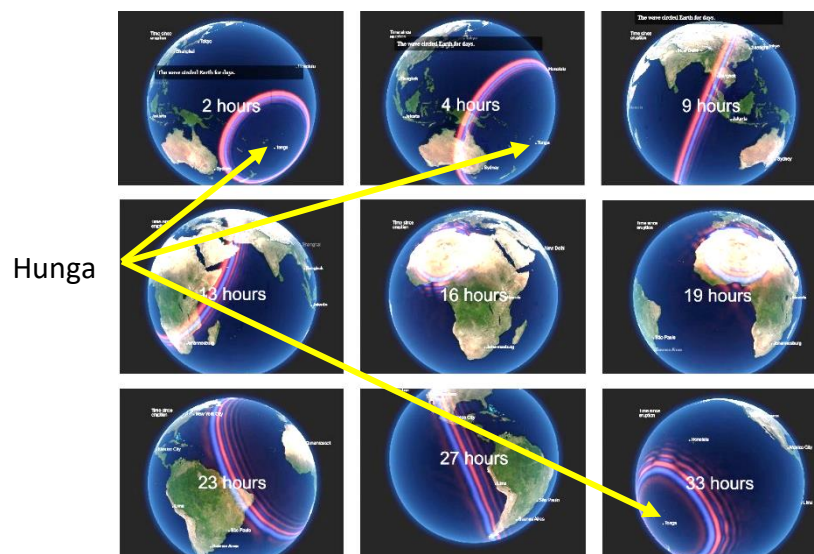
Le 15 Janvier 2022, une éruption du **volcan Hunga** a eu lieu dans le Pacifique (archipel de Tonga). L'« explosion » s'avère être une des plus intenses jamais enregistrées par l'être humain, à comparer avec l'éruption de Krakatau (1883), les explosions des essais nucléaires US de 1954 (15 MT – **millions** de tonnes ou Mégatonnes de TNT) ou de l'Union Soviétique de 1961 (57 MT), d'autres éruptions volcaniques (Mt St Helens 1980), les impacts de météores (Tunguska 1908, Chelyabinsk 2013), ou l'explosion de Beirut (2020) – Figure 2.

**Figure 2**



L'onde de pression générée s'est propagée tout autour de la terre (et a même rebondi plusieurs fois), comme représentée sur le graphique ci-dessous (Figure 3).

**Figure 3**



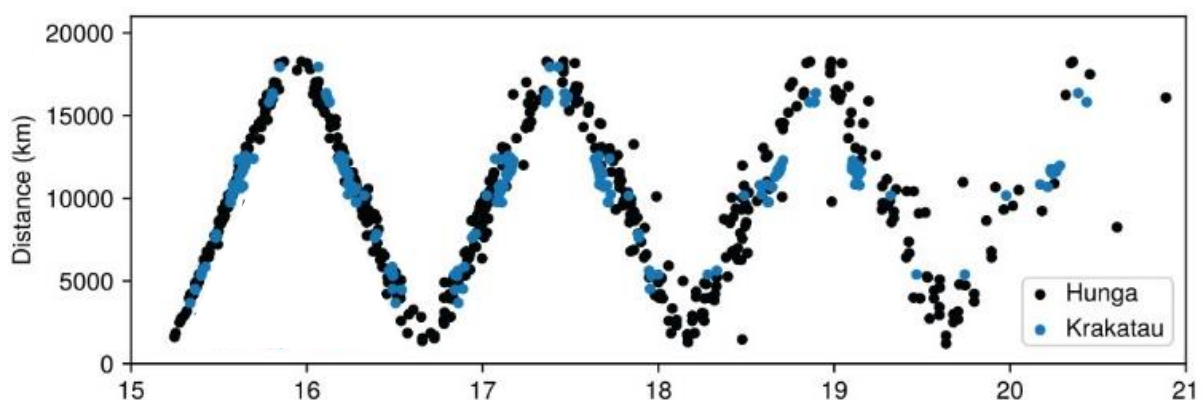
h. A partir des valeurs de surpression sur le graphe de la Figure 2, justifier le fait qu'aux distances indiquées, les ondes de chocs étaient d'intensité infinitésimale, donc des ondes acoustiques (pratiquement isentropiques).

i. Estimer l'énergie de l'explosion du volcan Hunga en kilogrammes de TNT en utilisant le graphe d'une onde sphérique (Figure 1). Pour une onde hémisphérique, il faut diviser le résultat par deux (il faudrait réduire davantage cette valeur car l'onde est 2D selon Figure 3).

Pour info, cette valeur est largement surestimée. En particulier, le graphe de la Figure 1 a été établi pour des explosions (nucléaires ou autres) de courte durée, alors qu'une éruption volcanique est de longue durée. En Janvier 2022, on avait annoncé une valeur de 10-20 Mégatonnes, qui vient d'être revue à la hausse dans la revue Science (100 Mégatonnes). Cependant le débat reste ouvert sur la vraie valeur.

j. Le graphe ci-dessous (Figure 4) représente la distance de l'onde de pression par rapport à son épicycle en fonction du temps.

Figure 4



i. Expliquer ce graphe (Figure 4).

Suggestions:

- La terre est ronde avec un périmètre de 40'000 km.
- Voir la propagation de l'onde sur le graphique de la Figure 3.

ii. Sur ce graphe (Figure 4), estimer la valeur de la vitesse de propagation de l'onde (l'axe horizontal correspond à date du jour, 15 Janvier, 16 Janvier etc.) et montrer qu'elle est proche de 300 m/s. **Conclusion (par rapport à la question h.) ?**

iii. Estimer la température moyenne de l'air que traverse cette onde (avec  $r = 287 \text{ J/kg.K}$  et  $\gamma = 1.4$ ).

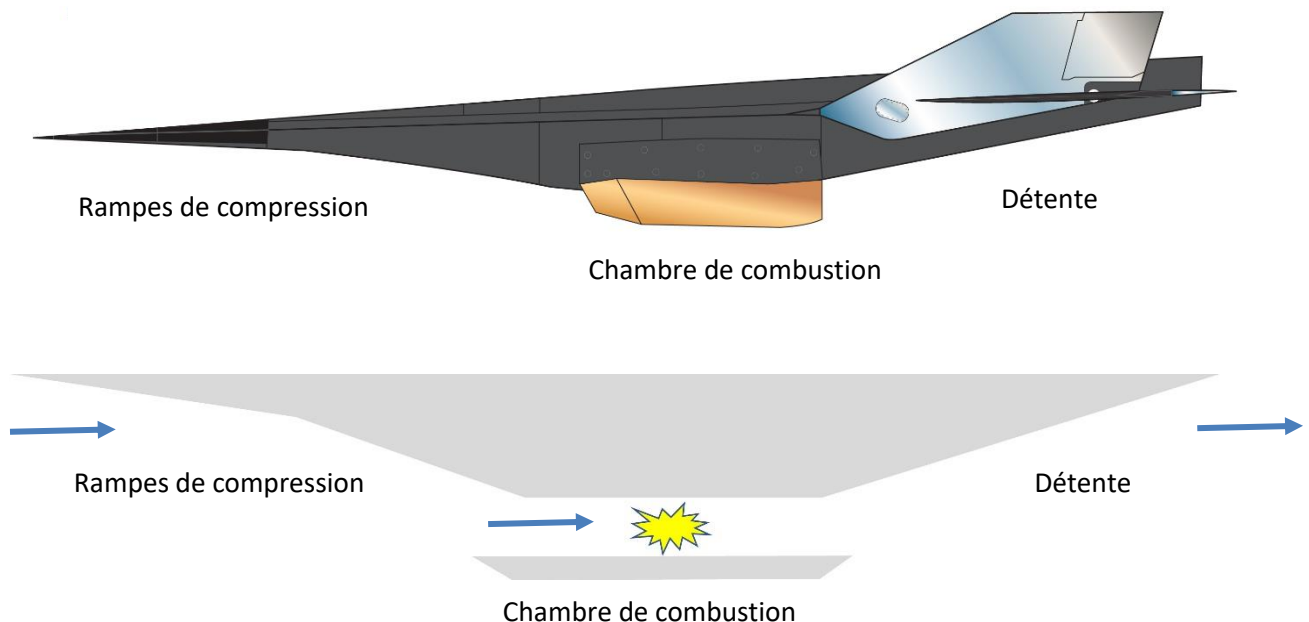
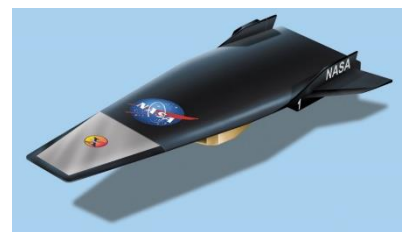


## 2. Mach 10

En 2004, la NASA et Lockheed Martin ont établi le record du monde vitesse (Mach 9.6) pour un véhicule aérien (sans pilote) utilisant l'air ambiant pour la combustion (cette séquence a été reprise dans le film Top Gun Maverick avec Tom Cruise).

Le véhicule (X-43) utilise un réacteur basé sur le principe du SCRAMJET (Supersonic Combustion Ram Jet). Le propulseur ne contient pas de compresseur ni de turbines : l'air est comprimé à travers des rampes de compression tout en restant supersonique ; le carburant (hydrogène) est injecté dans cet écoulement supersonique ; la réaction de combustion doit se faire très rapidement avant que les gaz ne sortent du réacteur ; les produits de combustion (vapeur d'eau) et l'azote de l'air sont ensuite détendus dans la tuyère (ouverte) de sortie.

(afin d'atteindre des vitesses supersoniques nécessaires pour son fonctionnement, le X-43 était monté sur le nez d'une fusée, placée elle-même sous l'aile d'un avion porteur)



Dans les exercices ci-dessous a. et b., les conditions de l'écoulement en amont sont :

$$M_{\infty} = 10$$

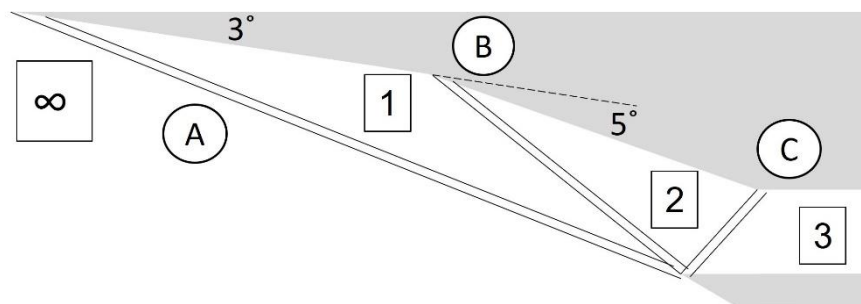
$$p_{\infty} = 1'000 \text{ Pa (à 30'000 m d'altitude)}$$

$$T_{\infty} = 220 \text{ K}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$r = 287 \text{ J/kg.K}$$

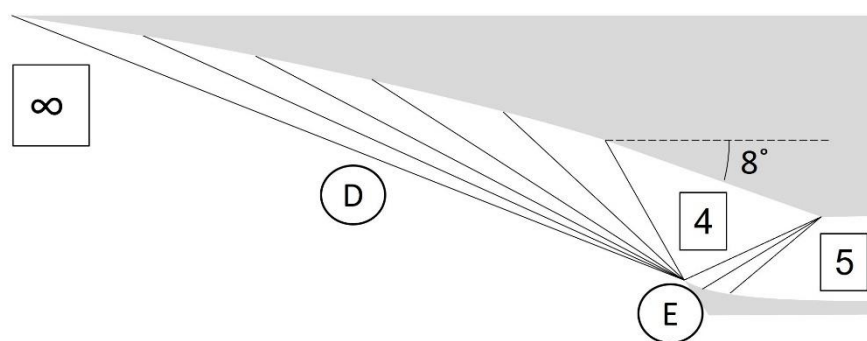
**a. Compression par ondes de chocs obliques.**



L'écoulement est comprimé à travers une onde de choc oblique A et une rampe de  $3^\circ$ , puis une deuxième onde de choc oblique B et une rampe de  $5^\circ$  (par rapport à la rampe précédente), et finalement à travers une troisième onde de choc oblique C pour revenir à l'horizontale.

- Expliquer la configuration de l'onde de choc C.
- Trouver la pression statique, température statique, et nombre de Mach en 3.

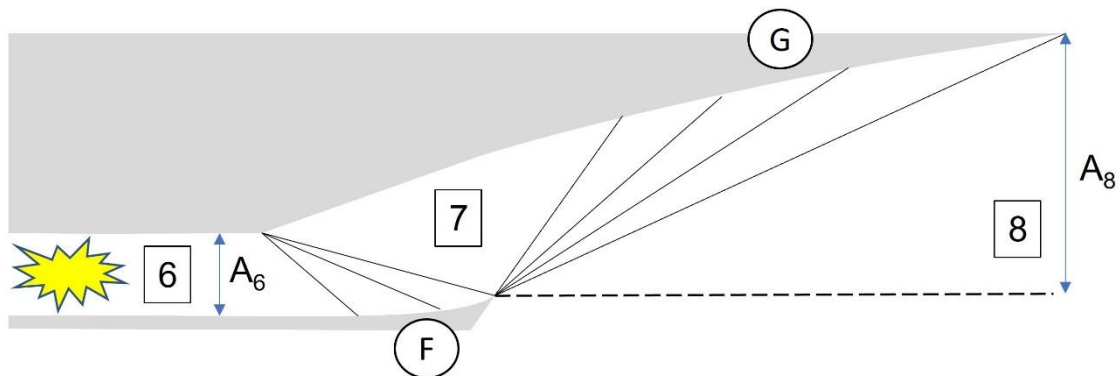
**b. Compression par éventails de Prandtl-Meyer**



L'écoulement est comprimé à travers un éventail de Prandtl-Meyer D pour une déflexion finale de  $8^\circ$ , puis à travers un deuxième éventail de Prandtl-Meyer E pour revenir à l'horizontale.

- Montrer que les propriétés en 5 peuvent être évaluées sans devoir connaître les valeurs en 4.
- Montrer que le nombre de Mach en 5 est égal à 6.203, et trouver la pression statique et température statique en 5.

### c. Détente et tuyère de sortie



Après combustion, l'azote de l'air et la vapeur d'eau (résultant de la réaction entre l'hydrogène et l'oxygène de l'air) sont détendus à travers une famille d'ondes de Prandtl-Meyer comme sur le schéma ci-dessus, pour ressortir horizontalement à pression ambiante. On suppose que les conditions en 6, en sortie de combustion, sont les suivantes :

$$M_6 = 2.5$$

$$p_6 = 200'000 \text{ Pa}$$

$$T_6 = 2'000 \text{ K}$$

$$\gamma = 1.3$$

$$\text{Masse Molaire} = 24.5 \text{ g/mol (azote et vapeur d'eau)}$$

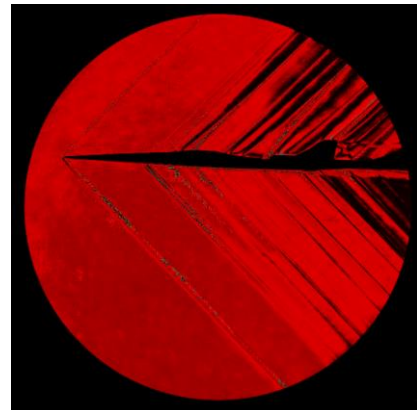
- i. Expliquer qualitativement comment la poussée est générée sur ce véhicule, du fait qu'il n'y a pas vraiment de tuyère en sortie.
- ii. Comme pour la question précédente, montrer que les conditions en 7 n'ont pas besoin d'être évaluées pour obtenir les conditions en 8.
- iii. Pour une pression en sortie  $p_8 = p_\infty = 1'000 \text{ Pa}$ , trouver le nombre de Mach  $M_8$ , la température  $T_8$ , le rapport d'aire  $A_8/A_6$ , et la vitesse de sortie des gaz  $V_8$ . Vérifier que cette vitesse est bien supérieure à la vitesse d'entrée  $V_\infty$ .
- iv. Même si l'écoulement en 6 est horizontal et ressort en 8 dans la même direction, il est dévié dans le sens anti-horaire d'abord en traversant F, puis dans le sens horaire en traversant G. Calculer la valeur absolue de l'angle total de déviation.

### 3. Quesst

Le Quiet SuperSonic Transport (QUESST) est un avion expérimental de la NASA et Lockheed (X-59) destiné à essayer de mitiger le boom des avions supersoniques avec un nez très effilé (le nez constitue plus d'un tiers de la longueur de l'avion). L'avion devrait prendre son envol à la fin de cette année.

Des essais en soufflerie ont été réalisés et une image a été révélée en Janvier 2022.

Le « nez » a un angle d'ouverture **total**  $2\delta = 4^\circ$ . Les ondes de choc émanant du bout du nez font un angle  $\theta = 45^\circ$  quand le modèle est aligné avec l'écoulement (angle d'incidence nul).



L'objectif est d'évaluer le nombre de Mach des essais en soufflerie par 4 méthodes différentes.

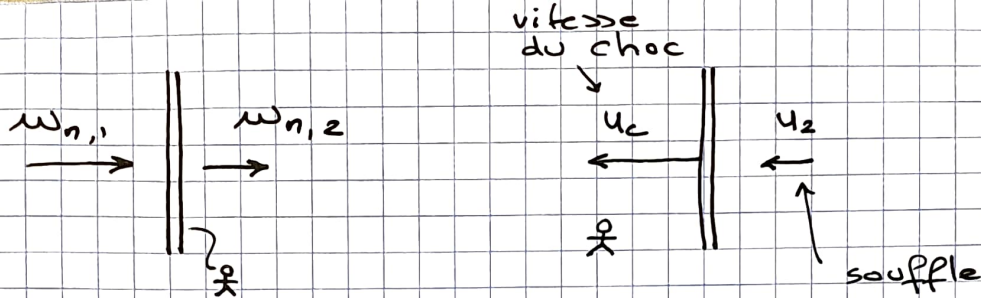
On prendra  $\gamma = 1.4$ .

- Evaluer approximativement le nombre de Mach à partir du graphe des chocs obliques.
- Estimer le nombre de Mach de ces essais en supposant que le « nez » a un angle infinitésimal (pratiquement nul).
- Pour une onde choc oblique, donner la relation générale (exacte) du carré du nombre de Mach  $M^2$  en fonction de l'angle de l'onde de choc  $\theta$  et l'angle de rampe  $\delta$ . Evaluer le nombre de Mach pour ce problème.
- Pour de petits angles  $\delta$ , montrer que la relation devient :

$$M^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ 1 + \frac{\gamma + 1}{\sin 2\theta} \cdot \delta + O(\delta^2) \right]$$

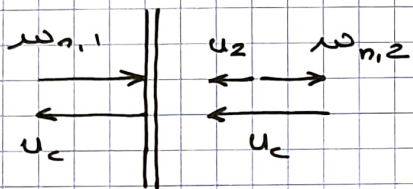
Evaluer le nombre de Mach avec cette équation et comparer avec les résultats précédents.

① a



b 
$$u_2 = \frac{2,5 \text{ m}}{0,8 \text{ s}} = 3,125 \text{ m/s}$$

c



$$u_c = w_{n,1} \quad u_c = w_{n,2} + u_2$$

$$\rightarrow w_{n,2} - w_{n,1} = -u_2$$

$$[w_n] = -u_2$$

d 
$$[w_n]^2 = -[p][v] = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s [p]^2$$

$$v = \frac{1}{\rho} \rightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^2 \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\rho^2 a^2}$$

$$\rightarrow [w_n]^2 = \frac{[p]^2}{\rho^2 a^2}$$

$$[w_n] = - \frac{[p]}{\rho a}$$

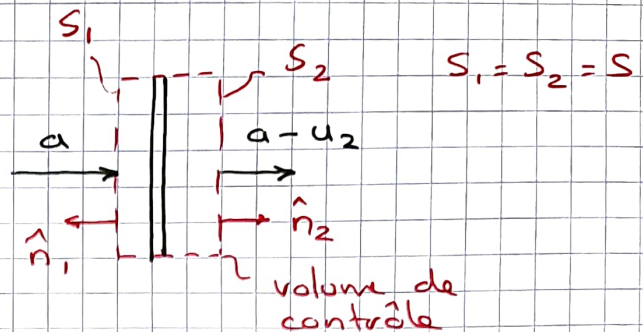
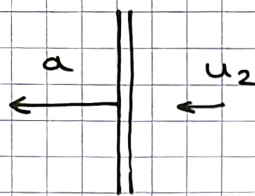
↑  
signe négatif car

$$[w_n] < 0$$

$$[p] > 0$$



(e) Avec  $u_c \approx a$



Avec les hypothèses classiques :

$$F. 32 \quad \int_S \rho \vec{v} (\vec{n} \cdot \hat{n}) dS = - \int_S p \hat{n} dS$$

$$S \left[ \rho_2 \vec{v}_2 (\vec{n}_2 \cdot \hat{n}_2) + \rho_1 \vec{v}_1 (\vec{n}_1 \cdot \hat{n}_1) \right] = - S [p_1 \hat{n}_1 + p_2 \hat{n}_2]$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{x} \quad \vec{v}_1 = a \hat{x}$$

$$\hat{n}_2 = +\hat{x} \quad \vec{v}_2 = (a - u_2) \hat{x}$$

$$\rightarrow \rho_2 v_2 (v_2) - \rho_1 v_1 (v_1) = - (p_2 - p_1)$$

Conservation de masse :  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

$$\rho_1 v_1 (v_2 - v_1) = - (p_2 - p_1)$$

$$\rho_1 a [(a - u_2) - a] = - (p_2 - p_1)$$

Avec  $[w_n] = -u_2$

$$\rightarrow \rho_1 a [w_n] = - [p]$$

(f)  $\rho = \frac{p}{rT} = \frac{85'000 \text{ Pa}}{(287 \text{ J/kg.K})(298 \text{ K})} \rightarrow \rho = 0,99 \text{ kg/m}^3$

$$a = \sqrt{\gamma r T} = [(1,4)(287 \text{ J/kg.K})(298 \text{ K})]^{1/2} = 346 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow [p] = \rho a u_2 = (0,99 \text{ kg/m}^3)(346 \text{ m/s})(3,125 \text{ m/s})$$

$$[p] = 1'070 \text{ Pa}$$

g) Avec  $[p] = 1'070 \text{ Pa}$ , on lit sur le graphe :

$$\frac{\text{Distance}}{(\text{Masse TNT})^{1/3}} \approx 60 \text{ m/kg}^{1/3}$$

Avec Distance = 16'000 m

$$\rightarrow \text{Masse TNT} = \left( \frac{16'000 \text{ m}}{60 \text{ m/kg}^{1/3}} \right)^3 \approx 19 \times 10^6 \text{ kg}$$

Comme l'onde est hémisphérique (et non sphérique), on divise la masse calculée par un facteur de deux :

Masse TNT  $\approx 9,5 \text{ kton}$

(proche de l'estimation de Fermi)

h) Les valeurs sur le graphe :  $0,5 \text{ Pa} < \Delta p < 500 \text{ Pa}$   
donnent  $\Delta p \ll p_{\text{atm}}$

(en particulier  $\Delta p < 1\% p_{\text{atm}}$ )

$\rightarrow$  il s'agit donc d'ondes acoustiques

i) On prend par exemple :  $\Delta p = 500 \text{ Pa}$   
Distance =  $2 \times 10^6 \text{ m}$

$$\frac{\text{Distance}}{(\text{Masse TNT})^{1/3}} \approx 120 \rightarrow \text{Masse TNT} \approx 4 \times 10^{12} \text{ kg}$$

Hémisphère : Masse TNT  $\approx 2 \text{ gigatonnes}$

(en juin 2022, la valeur estimé était de :

0,1 gigatonnes = 100 mégatonnes)



j) i. L'onde se propage à vitesse constante puis rebondit à l'antipode et repart à la même vitesse constante pour revenir au point d'origine etc.

ii. Avec la première onde, on peut estimer :

$$\Delta x \approx 16'000 \text{ km}$$

$$\Delta t \approx 14 \text{ h}$$

$$\rightarrow a \approx 317 \text{ m/s}$$

iii.  $a = \sqrt{\gamma r T}$

$$\rightarrow T = \frac{a^2}{\gamma r} = \frac{(317 \text{ m/s})^2}{(1,4)(287 \text{ J/kg.K})}$$

$$T \approx 250 \text{ K} \quad (-23^\circ\text{C})$$

(= température moyenne entre la température en surface et la température au niveau de la tropopause  $\approx -55^\circ\text{C}$ )

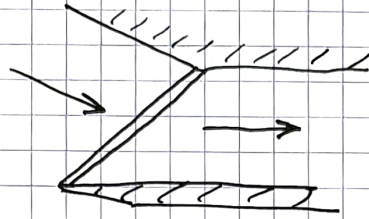


② a)

i. L'onde de choc C permet à l'écoulement de revenir à l'horizontale.

Il n'y a pas de réflexion sur la partie supérieure car la paroi y est horizontale.

On dit que le choc est absorbé.



peut être obtenu avec le graphe des chocs obliques

ii. (A) Avec  $M_\infty = 10$  et  $\delta_A = 3^\circ \rightarrow \theta_A = 7,84^\circ$   
 $M_{n_\infty} = M_\infty \sin \theta_A = 1,36$  valeur exacte

On peut alors utiliser les tables pour ondes de chocs droites ou les formules exactes :

$$\frac{P_1}{P_\infty} = 2,00 \quad \frac{T_1}{T_\infty} = 1,23 \quad M_{n_{1,A}} = 0,76$$

$$M_1 = \frac{M_{n_{1,A}}}{\sin(\theta_A - \delta_A)} = 8,96$$

(B)  $M_1 = 8,96$  et  $\delta_B = 5^\circ \rightarrow \theta_B = 10,13^\circ$

$$M_{n_{1,B}} = M_1 \sin \theta_B = 1,58$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2,73 \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,37 \quad M_{n_{2,B}} = 0,68$$

$$M_2 = \frac{M_{n_{2,B}}}{\sin(\theta_B - \delta_B)} = 7,56$$

(C)  $M_2 = 7,56$  et  $\delta_C = 8^\circ \rightarrow \theta_C = 13,92^\circ$

$$M_{n_{2,C}} = M_2 \sin \theta_C = 1,82$$

$$\frac{P_3}{P_2} = 3,69 \quad \frac{T_3}{T_2} = 1,54 \quad M_{n_{3,C}} = 0,61$$

$$M_3 = \frac{M_{n_{3,C}}}{\sin(\theta_C - \delta_C)} = 5,94$$

$$P_3 = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_\infty} \cdot P_\infty = 20,2 \text{ kPa} ; T_3 = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1}{T_\infty} \cdot T_\infty = 574 \text{ K}$$

(b) i. La compression de Prandtl-Meyer est isentropique, donc une évaluation du nombre de Mach en 5 à partir de la fonction de PM pour les éventails D et E suffit pour trouver toutes les propriétés en 5.

ii. En utilisant la relation analytique de la fonction de PM (F.105) :

$$v(M_\infty) = v(10) = 102,3163^\circ$$

$$\text{Avec } M_5 = 6,203$$

$$v(M_5) = v(6,203) = 86,3143^\circ$$

et on peut ainsi vérifier que :

$$v(M_\infty) - v(M_5) = 8^\circ + 8^\circ = 16^\circ$$

En utilisant les tables isentropes ou les relations exactes :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \rightarrow \frac{T_5}{T_\infty} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2} = 2,42$$

$$\rightarrow T_5 = 531,31 \text{ K}$$

$$\frac{P_5}{P_\infty} = \left( \frac{T_5}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 21,89 \rightarrow P_5 = 21,89 \text{ kPa}$$



③ i. La pression de sortie  $p_8$  est égale à la pression en entrée  $p_\infty$ .

Si le débit est conservé (en négligeant le débit de carburant dans la chambre de combustion) alors la poussée est due à la différence de vitesse entre l'entrée  $V_\infty$  et la sortie  $V_8$ .

ii. Voir question ② i

iii. Avec  $\frac{P_6}{P_8} = \frac{200'000 \text{ Pa}}{1'000 \text{ Pa}} = 200$

et en utilisant les tables isentropes ( $\gamma = 1,3$ ) ou la relation isentrope:

$$\frac{P_6}{P_8} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_8^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_6^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{voir question B})$$

$\gamma = 1,3$

$$\rightarrow M_8 = 6,1$$

$$\frac{T_8}{T_6} = \left( \frac{P_8}{P_6} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow T_8 = 588,9 \text{ K}$$

$$M_6 = 2,5 \rightarrow \frac{A_6}{A^*} = 2,9545$$

$$M_8 = 6,1 \rightarrow \frac{A_8}{A^*} = 131,49$$

$$\rightarrow \frac{A_8}{A_6} = \frac{A_8}{A^*} / \frac{A_6}{A^*} = 44,5$$

$$V_8 = M_8 \cdot \sqrt{\underset{\substack{\uparrow \\ 1,3}}{\gamma} \underset{\substack{\uparrow \\ r}}{r} T_8} = 3'109 \text{ m/s} \leftarrow$$
$$r = \frac{8'314}{24,5} = 339 \text{ J/kg.K}$$

$$V_\infty = M_\infty \cdot \sqrt{\underset{\substack{\uparrow \\ 1,4}}{\gamma} \underset{\substack{\uparrow \\ 287 \text{ J/kg.K}}}{r} T_\infty} = 2'973 \text{ m/s} \leftarrow$$

$V_8 > V_\infty$

iv. Angle total de déviation

$$|\Delta S| = \nu(M_8) - \nu(M_6)$$

Comme  $\delta = 1,3$ , il faut utiliser la formule F.105

$$M_6 = 2,5 \rightarrow \nu(M_6) = 43,25^\circ$$

$$M_8 = 6,1 \rightarrow \nu(M_8) = 100,22^\circ$$

$$\rightarrow |\Delta S| = 56,97^\circ$$



③ a)  $\Theta = 45^\circ$  et  $\delta = 2^\circ \rightarrow 1,45 < M < 1,5$  (graphe)

b) Onde de Mach :  $\delta \ll 1$ ,  $\Theta \sim \mu = 45^\circ$   
 $\rightarrow M = \frac{1}{\sin \mu} = \sqrt{2} = 1,414$

c) Avec  $\tan \delta = 2 \cot \Theta \frac{M^2 \sin^2 \Theta - 1}{M^2 (\gamma + \cos 2\Theta) + 2}$

$$\rightarrow M^2 (\gamma + \cos 2\Theta) \tan \delta + 2 \tan \delta = M^2 (2 \cot \Theta \sin^2 \Theta) - 2 \cot \Theta$$

$$M^2 = \frac{2 \cot \Theta + 2 \tan \delta}{\sin 2\Theta - (\gamma + \cos 2\Theta) \tan \delta}$$

$$\rightarrow M = 1,4752$$

d)  $\tan \delta \sim \delta$

$$M^2 \sim \frac{2 \cot \Theta}{\sin 2\Theta} \cdot \frac{1 + \tan \Theta \cdot \delta}{1 - \frac{\gamma + \cos 2\Theta}{\sin 2\Theta} \cdot \delta}$$

$$\sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left[ 1 + \left( \tan \Theta + \frac{\gamma + \cos 2\Theta}{\sin 2\Theta} \right) \delta \right]$$

$$\sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left[ 1 + \frac{\gamma + 2 \cancel{\sin^2 \Theta} + (1 - 2 \cancel{\sin^2 \Theta})}{\sin 2\Theta} \cdot \delta \right]$$

$$M^2 \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left( 1 + \frac{\gamma + 1}{\sin 2\Theta} \cdot \delta \right)$$

$$\rightarrow M \sim 1,4722$$